

Rachunek różniczkowy w zadaniach

Rachunek różniczkowy w zadaniach

**Jolanta Dymkowska
Danuta Beger**

Gdańsk 2025

Przewodniczący Komitetu Redakcyjnego
Wydawnictwa Politechniki Gdańskiej
Dariusz Mikielawicz

Recenzent
Tomasz Szarek

Redakcja językowa
Agnieszka Frankiewicz

Projekt okładki
Ewa Niziołkiewicz

Przygotowanie do druku
Danuta Beger, Jolanta Dymkowska

Wydanie I – 2016

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Gdańskiej

Oferta wydawnicza Politechniki Gdańskiej jest dostępna pod adresem
<https://sklep.pg.edu.pl/>

Utwór w całości lub we fragmentach nie może być powielany ani rozpowszechniany
w jakiegokolwiek formie i w jakikolwiek sposób bez pisemnej zgody posiadaczy praw autorskich.

© Copyright by Politechnika Gdańska,
Centrum Matematyki, Gdańsk 2025

ISBN 978-83-7348-678-2

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

Dodruk III wyd. I. Ark. wyd. 15,0, ark. druku 17,25, 1309/1279

Druk i oprawa: Volumina.pl Sp. z o.o.
ul. Księcia Witolda 7-9, 71-063 Szczecin, tel. 91 812 09 08

Spis treści

Przedmowa	7
1. Granica i ciągłość funkcji	9
1.1. Granica i ciągłość funkcji jednej zmiennej	9
Granica funkcji jednej zmiennej	9
Granice jednostronne	26
Ciągłość funkcji jednej zmiennej	30
Własności funkcji ciągłych	36
1.2. Granica i ciągłość funkcji wielu zmiennych	38
Funkcje wielu zmiennych	38
Granica funkcji wielu zmiennych	43
Granice iterowane	47
Ciągłość funkcji wielu zmiennych	51
1.3. Zadania do samodzielnego rozwiązania	54
2. Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej	65
2.1. Pochodna funkcji	65
Definicja pochodnej funkcji	65
Interpretacja geometryczna pochodnej	76
Różniczkowalność funkcji	78
Pochodne wyższych rzędów	82
2.2. Podstawowe twierdzenia rachunku różniczkowego	85
Różniczka funkcji	85
Wzór Taylora	86
Twierdzenie Rolle'a i Lagrange'a	90
Twierdzenie de l'Hospitala	93
2.3. Badanie przebiegu zmienności funkcji	97
Asymptoty wykresu funkcji	97
Monotoniczność i ekstrema lokalne funkcji	100
Ekstrema globalne funkcji	109
Wklęsłość i wypukłość funkcji. Punkty przegięcia	110
Badanie funkcji	116
2.4. Zastosowania rachunku różniczkowego funkcji jednej zmiennej	129

Zastosowania w fizyce	129
Zastosowania w chemii	132
Zastosowania w ekonomii	135
2.5. Zadania do samodzielnego rozwiązania	141
3. Rachunek różniczkowy funkcji wielu zmiennych	153
3.1. Pochodne cząstkowe	153
Pochodne cząstkowe rzędu pierwszego	153
Pochodna kierunkowa	166
Pochodne cząstkowe wyższych rzędów	169
Różniczka funkcji i wzór Taylora	174
Zastosowanie różniczki funkcji do obliczeń przybliżonych	179
Pochodne funkcji złożonej	180
3.2. Badanie funkcji wielu zmiennych	185
Płaszczyzna styczna do wykresu funkcji dwóch zmiennych	185
Ekstrema lokalne funkcji	187
Wartości najmniejsza i największa funkcji na zbiorze domkniętym	202
3.3. Zastosowania rachunku różniczkowego funkcji wielu zmiennych	208
Zastosowania w fizyce i chemii	208
Zastosowania w ekonomii	211
3.4. Zadania do samodzielnego rozwiązania	214
4. Funkcje uwikłane	227
4.1. Funkcje uwikłane jednej zmiennej	227
Definicja funkcji uwikłanej jednej zmiennej	227
Ekstrema lokalne funkcji uwikłanej	232
4.2. Funkcje uwikłane wielu zmiennych	234
Definicja funkcji uwikłanej wielu zmiennych	234
Płaszczyzna styczna do powierzchni	235
4.3. Zadania do samodzielnego rozwiązania	237
Dodatek – zbiory w przestrzeni euklidesowej	239
Otoczenie i sąsiedztwo	239
Zbieżność ciągu punktów w przestrzeni \mathbb{R}^n	241
Otwartość, domkniętość i ograniczoność zbioru	243
Odpowiedzi do zadań	247
Bibliografia	275

Przedmowa

Bez rachunku różniczkowego i całkowego niemożliwym jest istotne zrozumienie nowych teorii o czasie, przestrzeni i budowie materii.

Rachunkowi różniczkowemu i całkowemu zawdzięczamy dzisiejsze osiągnięcia w zakresie techniki.

Stefan Banach

Te słowa wybitnego polskiego matematyka Stefana Banacha kierujemy do wszystkich, którzy zainteresowali się zawartością tego podręcznika, aby z jego pomocą nabywać i doskonalić swoje umiejętności z rachunku różniczkowego. Przypuszczamy, że nikogo nie trzeba przekonywać, jak ważnym działem matematyki jest rachunek różniczkowy. Zanim jednak czytelnicy tej książki zagłębią się w definicjach i twierdzeniach oraz rozpoczną rozwiązywanie zadań z zakresu rachunku różniczkowego, warto, aby zrozumieli jego rolę i miejsce w matematyce i innych dziedzinach nauki, szczególnie w technice. Oddajmy głos Stefanowi Banachowi, który w przedmowie do książki „Od tabliczki do różniczki” napisał: „Matematyka jest najpiękniejszym i najpotężniejszym tworem ducha ludzkiego. (...) Matematycy średniowiecza przygotowali grunt dla jednego z największych odkryć, które wywarło przemożny wpływ na rozwój kultury i przyczyniło się w wielkiej mierze do osiągnięcia dzisiejszych wyżyn. Odkrycia tego dokonali Newton i Leibniz, stwarzając nową metodę badawczą, tzw. rachunek różniczkowy i całkowity. Pojęcia nowego rachunku pozwoliły Newtonowi wypowiedzieć nowe prawa rządzące materią we wszechświecie i wyjaśnić ruchy planet. Metody i wyniki rachunku różniczkowego i całkowego umożliwiły zgłębienie tajemnic przyrody i doprowadziły nauki fizyczne do ich wysokiego poziomu”.

Podręcznik, który oddajemy do rąk czytelnika, ma stanowić pomoc i uzupełnienie w nauce rachunku różniczkowego zapoczątkowanej na wykładach i ćwiczeniach akademickich. Skrypt może być pomocny w poznawaniu podstaw rachunku różniczkowego i ćwiczeniu umiejętności rozwiązywania zadań nie tylko studentom, ale również uczniom zainteresowanym samodzielnym zgłębianiem tej tematyki. Każdy rozdział zawiera wyjaśnienie podstawowych pojęć, podaje podstawowe definicje i twierdzenia, które następnie są zilustrowane przykładami z rozwiązaniami. Zakończony jest zestawem zadań do samodzielnego rozwiązania o zróżnicowanym stopniu trudności, co umożliwia korzystanie z podręcznika studentom różnych kierunków studiów i o różnym stopniu zaawansowania wiedzy. W podręczniku zawarłyśmy ponad osiemset zadań do samodzielnego rozwiązania, blisko trzysta zadań z rozwiązaniami oraz zadania z zastosowań rachunku różniczkowego. Ze względu na

obszerność tematyki zastosowań rachunku różniczkowego w innych dziedzinach i stosowanie w nich specyficznych dla poszczególnych dziedzin symboli i nazewnictwa postanowiliśmy ograniczyć ich zakres tylko do klasycznych zastosowań w fizyce, chemii i ekonomii.

Sposób ujęcia zagadnień, które obejmuje niniejszy podręcznik, jest wynikiem wieloletnich doświadczeń i został wypracowany w trakcie przygotowań zajęć dla studentów Politechniki Gdańskiej. Przygotowując materiały dla studentów, staramy się czerpać z wielkiego dorobku dydaktycznego wybitnych matematyków i dydaktyków, m.in. cytowanego na wstępie Stefana Banacha, nie tylko jednego z największych matematyków, ale również autora wielu podręczników szkolnych i akademickich.

W tym miejscu szczególnie serdeczne podziękowania kierujemy do naszego starszego, bardzo doświadczonego kolegi i serdecznego przyjaciela, dr. Gerarda Paszka, który wniósł ogromny wkład w powstanie tej książki w postaci wielu cennych uwag, sugestii i wskazówek.

Dziękujemy również naszym pozostałym koleżankom i kolegom z Centrum Matematyki Politechniki Gdańskiej za wsparcie i życzliwość. Szczególne podziękowania kierujemy do studentów Politechniki Gdańskiej, którzy uczestniczyli w prowadzonych przez nas wykładach oraz ćwiczeniach i bez których ten podręcznik nigdy by nie powstał.

Autorki