Marek Hubert Zienkiewicz

WYBRANE TEORETYCZNE I APLIKACYJNE WŁASNOŚCI M_{SPLIT} ESTYMACJI

Gdańsk 2024

PRZEWODNICZĄCY KOMITETU REDAKCYJNEGO
WYDAWNICTWA POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ
Dariusz Mikielewicz

REDAKTOR PUBLIKACJI NAUKOWYCH
Michał Szydłowski

RECENZENCI
Sławomir Cellmer
Marcin Jagoda

REDAKCJA JĘZYKOWA
Joanna Niezgoda

SKŁAD KSIĄŻKI
Wioleta Lipska-Kamińska

PROJEKT OKŁADKI
Jakub Jabłoński

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Gdańskiej

Oferta wydawnicza Politechniki Gdańskiej jest dostępna pod adresem
https://www.sklep.pg.edu.pl

ISBN 978-83-7348-909-7

Panu

prof. dr. hab. inż. Zbigniewowi Wiśniewskiemu

składam serdeczne podziękowania
za pomoc i życzliwość przy pisaniu pracy.

Szczególne podziękowania kieruję także do **prof. dr. hab. inż. Romana Kadaja** oraz **prof. dr. hab. inż. Witolda Prószyńskiego** – Recenzentów mojej pracy doktorskiej, których cenne uwagi i spostrzeżenia dotyczące moich badań naukowych zostały uwzględnione w poprawionej i uzupełnionej wersji dysertacji, stanowiącej treść niniejszej monografii, jak również okazały się katalizatorem oraz swoistym drogowskazem podjętych przeze mnie kierunków badań dotyczących metody M_{split} estymacji.

Pragnę również podziękować Panom Recenzentom niniejszej monografii, dr. hab. inż. Sławomirowi Cellmerowi oraz dr. hab. inż. Marcinowi Jagodzie, za wnikliwe przejrzenie treści manuskryptu i życzliwe uwagi.

Spis treści

Wykaz skrótów, symboli i oznaczeń

Skróty

GNSS – Globalny System Nawigacji Satelitarnej, Global Navigation Satellite System
IF – funkcja wpływu, *influence function*
MNK – metoda najmniejszych kwadratów
MNW – metoda największej wiarygodności
MSR – średni wskaźnik sukcesu, *mean success rate*
UMNK – uogólniona metoda najmniejszych kwadratów
UMVQUIE – jednorodny, niezmienniczy i nieobciążony estymator kwadratowy o minimalnej wariancji, *uniformly, minimum variance, quadratic, unbiased and invariant estimator*
ZWA – zasada wyboru alternatywy

Symbole

$\mathbf{a}_i$ – i-ty wiersz macierzy współczynników $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}(n \times r)$ – macierz współczynników (projektu) o wymiarach $n \times r$
$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{v}}}(n \times n)$ – macierz kowariancji obliczonych poprawek obserwacyjnych
$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{X}}}(r \times r)$ – macierz kowariancji estymowanych parametrów
$\mathbf{C}_{\mathbf{y}}(n \times n)$ – macierz wariancyjno-kowariancyjna wektora obserwacji
$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{y}}}(n \times n)$ – macierz kowariancji wyrównanych obserwacji
$E(\mathbf{v})$ – wartość oczekiwana wektora $\mathbf{v}$
$f(y;\theta)$ – funkcja gęstości
$F(y;\mathbf{X})$ – dystrybuanta rozkładu prawdopodobieństwa obserwacji y
$\mathbf{F}(\mathbf{X})$ – funkcja wektorowa o argumencie $\mathbf{X}$
g – pomiarowy błąd gruby
$\mathbf{g}_{(l)}(\mathbf{X}_{(1)},\ldots,\mathbf{X}_{(q)})$ – gradient funkcji celu metody $M_{split(q)}$ estymacji (dla $l = 1,\ldots,q$)
$\mathbf{H}_{(l)}(\mathbf{X}_{(1)},\ldots,\mathbf{X}_{(q)})$ – hesjan funkcji celu metody $M_{split(q)}$ estymacji (dla $l = 1,\ldots,q$)
$I_f(y;\theta)$ – ilość f-informacji

$\mathbf{I}(n \times n)$ – macierz jednostkowa o wymiarach $n \times n$
$K(y; \mathbf{X}_{(1)}, ..., \mathbf{X}_{(q)})$ – elementarny potencjał rozszczepienia
$K(\mathbf{y}; \mathbf{X}_{(1)}, ..., \mathbf{X}_{(q)})$ – globalny potencjał rozszczepienia
$L(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y})$ – funkcja wiarygodności
$\mathbf{L}(n \times 1)$ – wektor wyrazów wolnych o wymiarach $n \times 1$
$L_{\ln}(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{y})$ – logarytmiczna funkcja wiarygodności
m_i – błąd średni i-tej obserwacji
$m_{\hat{v}}$ – błąd średni obliczonej poprawki obserwacyjnej
p_i – waga i-tej obserwacji
$\mathbf{P}(n \times n)$ – macierz wag obserwacji o wymiarach $n \times n$
$\widehat{\mathbf{P}}(n \times n)$ – macierz ekwiwalentnych wag obserwacji o wymiarach $n \times n$
$\mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ – rodzina rozkładów P_θ indeksowanych parametrem θ
$\mathbf{Q}(n \times n)$ – macierz kofaktorów wektora $\mathbf{y}$
R – zbiór liczb rzeczywistych
$\mathbf{S}(n \times n)$ – macierz modalna o wymiarach $n \times n$
$\mathrm{Tr}(\circ)$ – ślad macierzy kwadratowej
$\hat{v}$ – obliczona poprawka obserwacyjna
$\overline{v}$ – standaryzowana poprawka obserwacyjna
$\mathbf{v}(n \times 1)$ – wektor teoretycznych poprawek obserwacyjnych o wymiarach $n \times 1$
$V(\circ)$ – wariancja
$w(v)$ – funkcja wagowa
$\mathbf{w}_{(l)}(\mathbf{v}_{(k<l)}, \mathbf{v}_{(k>l)})$ – macierz krzyżowego wagowania
$\mathbf{X}(r \times 1)$ – wektor niewiadomych o wymiarach $r \times 1$
$\mathbf{X}^0$ – wektor przybliżonych wartości parametrów
y – wynik pomiaru, obserwacja
$\mathbf{y} = [y_1, ..., y_n]^T$ – wektor wyników pomiaru (obserwacji) o wymiarach $n \times 1$
$Y \sim P_\theta$ – zmienna losowa Y o rozkładzie prawdopodobieństwa $Y \sim P_\theta$
$\mathbf{Y}^p = [Y_1^p, \cdots, Y_n^p]^T$ – wektor prawdziwych wielkości podlegających pomiarowi

Δ – przesunięcie pomiędzy dwoma parametrami
$\boldsymbol{\varepsilon}(n \times 1)$ – wektor losowych błędów pomiaru o wymiarach $n \times 1$
$\boldsymbol{\eta}(n \times 1)$ – przekształcony wektor poprawek obserwacyjnych
$\boldsymbol{\lambda}(n \times n)$ – macierz spektralna o wymiarach $n \times n$
Θ – przestrzeń parametrów rozkładu prawdopodobieństwa
θ – parametr rozkładu prawdopodobieństwa
$\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \cdots, \theta_n]^T$ – wektor parametrów rozkładu prawdopodobieństwa
$\hat{\boldsymbol{\theta}} = [\hat{\theta}_1, \cdots, \hat{\theta}_n]^T$ – estymator wektora $\boldsymbol{\theta}$
$\rho(y; \theta)$ – funkcja o arbitralnie przyjmowanej postaci

σ_0^2 – współczynnik wariancji
$\hat{\sigma}_0^2$ – estymator współczynnika wariancji
$\varphi(\mathbf{X})$ – funkcja celu o argumencie **X**
$\varphi(\mathbf{X}_{(1)},...,\mathbf{X}_{(q)})$ – funkcja celu w metodzie $M_{\mathrm{split(q)}}$ estymacji

Oznaczenia

$\forall$ – kwantyfikator ogólny (czytaj: dla każdego…)
$\propto$ – znak proporcjonalności
$*$ – oznaczenie iloczynu Hadamarda
exp – funkcja eksponencjalna
split – rozszczepienie
sup – supremum, kres górny
$rank(\mathbf{A})$ – rząd macierzy **A**
$\partial\mathbf{F}(\mathbf{X})/\partial\mathbf{X}$ – jakobian funkcji wektorowej $\mathbf{F}(\mathbf{X})$

Wprowadzenie

Statystyczne opracowanie wyników pomiaru stanowi integralną część praktyki geodezyjnej i dotyczy na ogół estymacji parametrów występujących w funkcjonalnych modelach obserwacji (np. współrzędnych punktów sieci geodezyjnych, parametrów deformacji tych sieci, parametrów w modelach błędów deterministycznych itd.). Proces estymacji parametrów, a następnie wyrównanie obserwacji (wraz z odpowiednią analizą dokładności) stanowią ważną część większości technologii geodezyjnych. Głównie dlatego, że z uwagi na wiele trudnych do przewidzenia czynników obserwacje są obarczone wielkościami o charakterze losowym – błędami pomiaru (pomijamy tutaj błędy o charakterze deterministycznym). Losowe błędy pomiaru są opisywane modelami statystycznymi dotyczącymi na ogół wariancji i kowariancji oraz, coraz częściej, modelami probabilistycznymi wyrażanymi funkcjami gęstości lub dystrybuantami. Informacje niesione przez te modele wraz z metodami estymacji o odpowiednio dobranych kryteriach optymalizacyjnych pozwalają na minimalizowanie wpływu zakłóceń losowych na ostateczne wyznaczenia. Inaczej mówiąc, rezultatami opracowania obserwacji powinny być takie oszacowania wielkości mierzonych oraz wybranych parametrów, które są możliwie najbliższe wartościom prawdziwym.

Już na początku XIX wieku francuski matematyk i geodeta Adrien Marie Legendre zauważył, że poszukiwanie najbardziej prawdopodobnej wartości wielkości mierzonej w układzie nadokreślonym (liczba obserwacji jest większa od liczby wyznaczanych parametrów) może przebiegać poprzez wyznaczenie takiego jej estymatora, dla którego suma kwadratów odchyleń wyników pomiaru od tej wielkości daje wartość najmniejszą z możliwych (Legendre 1805). Prawo do tego odkrycia zgłaszał również niemiecki geodeta Carl Friedrich Gauss, który metodę o takim kryterium optymalizacji nazwał metodą najmniejszych kwadratów błędów (MNK). Dodatkowo w pracy Gaussa (1809) teoria MNK została przezeń wsparta założeniem o rozkładzie normalnym błędów pomiaru. Od tej pory metoda najmniejszych kwadratów jest najczęściej stosowaną w praktyce geodezyjnej metodą estymacji. Aplikacyjność MNK wykracza jednak szeroko poza zastosowania geodezyjne (zob. np. Cao i in. 2014; Kopp 1993; Reutter i in. 2000).

Inną ważną metodą estymacji jest metoda największej wiarygodności (MNW), zaproponowana i szczegółowo opisana w pracy (Fisher 1922). Kryterium optymalizacyjne w tej metodzie jest budowane na podstawie zakładanych funkcji gęstości obserwacji. Po pomiarze, gdy są już znane realizacje zmiennych losowych, argumentem w funkcjach gęstości staje się wyznaczany parametr. Estymatorem MNW tego parametru jest taka wielkość, dla której iloczyn funkcji gęstości, nazywany funkcją wiarygodności, uzyskuje największą wartość. Z uwagi na problemy o charakterze numerycznym iloczynową funkcję wiarygodności zastępuje się jej logarytmem (logarytmiczną funkcją wiarygodności). Należy odnotować, że dla rozkładów normalnych, jako probabilistycznych modeli obserwacji, kryterium optymalizacyjne w metodzie największej wiarygodności jest takie same jak w metodzie najmniejszych kwadratów (np. Rao 1973; Wiśniewski 2013). Wobec tego rozważane przez Gaussa i Legendre'a estymatory MNK są w istocie szczególnym przypadkiem estymatorów MNW.

Na podstawie funkcji gęstości budowana jest także inna metoda estymacji opracowana przez Kadaja (1984) i nazwana zasadą wyboru alternatywy (ZWA). Kryterium optymalizacyjne stanowi tutaj maksimum sumy funkcji gęstości. Autor metody jako probabilistyczne modele przyjął rozkłady normalne. ZWA była jednak także rozwijana przy zastosowaniu innych modeli probabilistycznych, w tym przede wszystkim szeregów Edgewortha (Dumalski 2006; Dumalski, Wiśniewski 1995).

Peter Jost Huber w swoich pracach (1964, 1981) uogólnił MNW, zastępując logarytmy funkcji gęstości innymi, w zasadzie dowolnymi funkcjami (ze względów numerycznych najlepiej jest, gdy są to funkcje różniczkowalne). Uzyskana w ten sposób metoda jest nazywana M-estymacją. Możliwość arbitralnego przyjęcia składowych funkcji celu w M-estymacji (w MNW są to logarytmy ustalonych funkcji gęstości) umożliwia projektowanie estymatorów o „pożądanych" własnościach. Najczęściej oczekuje się, aby wyznaczone M-estymatory były odporne na błędy grube. Odporną w tym sensie M-estymację uzyskuje się dla szerokiego zbioru składowych funkcji celu, opisywanych między innymi w pracach (Hampel i in. 1986; Huber 1981; Krarup, Kubik 1983). Należy odnotować, że do klasy M-estymacji należy nie tylko MNW (jako „praźródło" tej klasy), ale także metoda najmniejszych kwadratów oraz zasada wyboru alternatywy.

Metody należące do szerokiej klasy M-estymacji definiowane są przy fundamentalnym założeniu, że pojedyncza obserwacja jest realizacją ustalonej zmiennej losowej (ściślej zmiennej losowej o ustalonych parametrach). Zarówno z teoretycznego, jak i praktycznego punktu widzenia interesujące jest jednak rozważenie sytuacji, w której obserwacja może być realizacją jednej z dwóch (lub więcej) zmiennych losowych różniących się parametrami. Konkretnej obserwacji trudno jest wtedy przyporządkować odpowiadającą jej zmienną losową. Brak takiej jednoznaczności prowadzi do nieustalonego (nierozpoznanego) zmieszania zbioru obserwacji, przy czym każda z obserwacji jest realizacją którejś ze wzajemnie konkurencyjnych zmiennych losowych. W takich przypadkach na ogół przeprowadza się segregację zbiorów z zastosowaniem metod analizy klastrowej (np. Kaufman, Rousseeuw 1990) oraz poprzez analizę głównych składowych (np. Davydenko, Grayver 2014).

Inne podejście do estymacji parametrów w zbiorach o nieustalonym zmieszaniu zaproponowano w pracach (Wiśniewski 2008, 2009a, 2009b, 2009c, 2010). Przyjęto tam, że każdej obserwacji może odpowiadać któryś ze wzajemnie konkurencyjnych parametrów rozkładu, co w konsekwencji prowadzi do rozszczepienia klasycznego, funkcjonalnego modelu obserwacji. W procesie estymacji obserwacja, przez zawarty w niej potencjał rozszczepienia (także definiowany w cytowanych pracach), „sama wybiera" tę wersję modelu, która jest dla niej najlepsza. Taka metoda estymacji konkurencyjnych parametrów została nazwana przez jej autora M_{split} estymacją. Teoretyczną podstawą tej metody jest klasyczna M-estymacja, jednak odniesiona do rozszczepionych modeli funkcjonalnych (stąd pochodzi nazwa zaproponowanej metody). M_{split} estymacja jest szczególnego rodzaju rozwinięciem nie tylko M-estymacji, ale także metody największej wiarygodności. Ponadto, dla pewnego rodzaju składowych funkcji celu jest także uogólnieniem metody najmniejszych kwadratów.

Jak dotąd M_{split} estymacja znalazła zastosowanie między innymi w procesie wyznaczania przemieszczeń (Duchnowski, Wiśniewski 2012, 2014; Wiśniewski 2009a; Wiśniewski i in. 2019; Wyszkowska, Duchnowski 2020a; Zienkiewicz 2015, 2019; Zienkiewicz, Baryła 2015), identyfikacji bazy odniesienia (Banimostafavi i in. 2020; Guo i in. 2020; Nowel 2019; Zienkiewicz 2022), w modelowaniu danych skaningu laserowego (Janowski, Rapiński 2013), filtracji danych dla celów tworzenia cyfrowych modeli terenu (Błaszczak-Bąk i in. 2015), detekcji błędów grubych (Li i in. 2013), odpornej transformacji współrzędnych (Janicka, Rapiński 2013), wyznaczania profilów terenowych na podstawie pomiarów skanerem laserowym (Wyszkowska i in. 2021), wpasowania różnych obiektów geometrycznych w chmurę punktów (Janicka i in. 2020; Janowski 2018; Janowski i in. 2021; Zienkiewicz, Dąbrowski 2023), estymacji konkurencyjnych wersji parametrów w modelach typu *errors-in-variable* (Wiśniewski 2022) oraz do wykrywania obiektów o niskim poziomie sygnału w systemach nawigacji radarowej (Czaplewski i in. 2019). Jako alternatywa odpornej M-estymacji M_{split} estymacja została wskazana w pracach (Amiri-Simkooei i in. 2016; Ge i in. 2013; Wiśniewski, Zienkiewicz 2021a; Yang i in. 2010). Z teoretycznego punktu widzenia obserwacja odstająca (obarczona błędem grubym) jest realizacją zmiennej losowej o nieakceptowanym rozkładzie prawdopodobieństwa. W procesie M_{split} estymacji takiej obserwacji zostaje przyporządkowany parametr pozycyjny dotyczący tego właśnie rozkładu. Odporność ma więc tutaj szerszy charakter niż w odpornej M-estymacji. W M_{split} estymacji realizacje zmiennych losowych o „dobrym" i „nieakceptowanym" rozkładzie prawdopodobieństwa są bowiem przyporządkowywane do dwóch różnych modeli funkcjonalnych (obserwacja „sama decyduje", który model jest dla niej właściwy). Pozwala to na wyznaczenie parametrów obserwacji odstających, a tym samym na rozpoznanie ich własności (niekiedy także na rozpoznanie źródła ich pochodzenia). W odpornej M-estymacji takie obserwacje są eliminowane lub co najmniej ich wpływ na wyznaczany estymator jest wygaszany i nie stanowią one przedmiotu dalszego zainteresowania. Warto tutaj wskazać, że odstawanie obserwacji nie musi wynikać z jej obarczenia błędem grubym. Stąd też M_{split} estymacja ma szerszy zakres zastosowania, na przykład w analizie deformacji sieci geodezyjnych. W takich przypadkach odstawanie obserwacji może być rezultatem przemieszczenia punktu sieci. Nie jest jednak tutaj wykluczone, że odstawanie może także wynikać z wpływu błędu grubego.

W analizie deformacji przedmiotem zainteresowania jest przede wszystkim przesunięcie (shift) między zbiorami obserwacji uzyskanymi w różnych epokach pomiarowych.

Naturalną i coraz częściej stosowaną w problemach geodezji metodą estymacji przesunięcia jest R-estymacja (np. Cymerman i in. 2016; Duchnowski 2011, 2013; Duchnowski, Wiśniewski 2014, 2017; Kargoll 2005; Rousseeuw, Verboven 2002). Wyznaczenie estymatora przesunięcia pomiędzy zbiorami obserwacji jest prowadzone z zastosowaniem testów rangowych. R-estymacja, podobnie jak odporna M-estymacja, należy do grupy metod odpornych (Hampel i in. 1986; Huber 1981). W problemach geodezji odporność tej metody jest wzmacniana przez integrację z innymi metodami, na przykład z odporną estymacją odchylenia standardowego (Duchnowski 2010).

Zastosowanie M_{split} estymacji do oceny przesunięcia zbiorów obserwacji przedstawiono w pracach (Duchnowski, Wiśniewski 2011, 2012). Przyjmując, że układ rozszczepionych modeli funkcjonalnych odpowiada epokom pomiarowym, zaproponowano tam taką wersję M_{split} estymacji, która pozwala na bezpośrednią estymację przesunięcia parametrów w tych modelach. Tę szczególną wersję M_{split} estymacji jej autorzy nazwali Shift-M_{split} estymacją. Przesunięcie pomiędzy parametrami można również obliczyć w sposób pośredni, korzystając z wyznaczonych M_{split} estymatorów (Wiśniewski 2009a). Należy odnotować, że Shift-M_{split} czy też M_{split} estymację można stosować do zbiorów zawierających obserwacje z różnych epok pomiarowych (bez uporządkowania). W procesie estymacji obserwacje „same wybierają", która z epok jest dla nich właściwa (tj. który z rozszczepionych modeli funkcjonalnych jest dla nich najlepszy). Shift-M_{split} estymacja jednak zawodzi w przypadku, gdy w zbiorze są obserwacje obarczone błędami grubymi. Rozwiązaniem może być tutaj wprowadzenie dodatkowego modelu funkcjonalnego absorbującego tego rodzaju obserwacje (Zienkiewicz 2015, Zienkiewicz, Baryła 2015). Koncepcję zastosowania dodatkowego modelu (dodatkowej wirtualnej epoki pomiarowej) rozwinięto i przeanalizowano także w niniejszej pracy.

Wyznaczenie estymatorów parametrów funkcjonalnych modeli obserwacji nie jest jedynym zadaniem w analizie danych obserwacyjnych. Integralną częścią tego procesu jest także ocena dokładności uzyskanych wyznaczeń. Opracowana i opublikowana teoria M_{split} estymacji (oraz jej rozwinięć i przypadków szczególnych) nie zawiera tego etapu. Próby podjęte w tym zakresie polegały jedynie na analizach z zastosowaniem metody Monte Carlo (Duchnowski, Wiśniewski 2014). Wobec tego, zarówno z teoretycznego, jak i praktycznego punktu widzenia, istotne jest uzupełnienie teorii M_{split} estymacji o problemy dotyczące oceny dokładności. Chodzi tutaj przede wszystkim o wyznaczenie macierzy kowariancji estymowanych wielkości. Podstawowym problemem w tym wyznaczeniu jest ocena *a posteriori* ustalonej teoretycznej macierzy kowariancji. W tradycyjnych metodach wyrównania obserwacji (z pojedynczym modelem funkcjonalnym) taka ocena jest na ogół prowadzona z zastosowaniem estymatora globalnego współczynnika wariancji. W M_{split} estymacji model funkcjonalny ulega rozszczepieniu, co oznacza, że taki charakter będzie miała także ocena *a posteriori* macierzy kowariancji wyznaczonych estymatorów. Wynika to z faktu, że w M_{split} estymacji estymator współczynnika wariancji powinien być obliczany na podstawie każdego z konkurencyjnych modeli funkcjonalnych. Teoria estymatorów kwadratowych nie obejmuje takich przypadków i koncentruje się na estymatorach współczynników wariancji obliczanych przy użyciu pojedynczych funkcjonalnych modeli obserwacji z jednoznacznie ustalonymi parametrami (np.

Rao 1973; Kubáček 1988). Zastosowanie tej teorii do rozszczepionych współczynników wariancji stanowi przedmiot zainteresowania niniejszej pracy. Teoretyczne macierze kowariancji M_{split} estymatorów ustalono z zastosowaniem zasady propagacji macierzy kowariancji, natomiast estymatory rozszczepionych współczynników wariancji pozwoliły na wyznaczenie ich ocen *a posteriori*.

Przedstawione powyżej zagadnienia i problemy dotyczą przypadków, w których obserwacje są wzajemnie niezależne. Takie założenie przyjął autor teorii M_{split} estymacji. W praktyce geodezyjnej są jednak coraz częściej rozważane układy obserwacyjne tworzone dla wzajemnie zależnych obserwacji (czy też pseudoobserwacji). Jednym z założeń niniejszej pracy było również rozszerzenie teorii M_{split} estymacji obejmującej takie sytuacje.

Zaprezentowane wyżej uwagi dotyczące M_{split} estymacji oraz możliwości jej rozwoju, a także wcześniejsze wyniki badań przeprowadzonych przez autora w tym zakresie pozwalają na sformułowanie następujących podstawowych celów niniejszej rozprawy:
1. uzupełnienie M_{split} estymacji o statystyczny model obserwacji;
2. opracowanie zasad oceny dokładności M_{split} estymatorów, w tym zasad estymacji rozszczepionych współczynników wariancji;
3. rozwinięcie teorii i analiza odpornej estymacji przesunięcia między parametrami w rozszczepionym modelu funkcjonalnym;
4. analiza M_{split} estymacji jako alternatywy dla odpornych M-estymacji;
5. uogólnienie metody M_{split} estymacji na przypadek zmiennych zależnych.

Praca składa się z siedmiu rozdziałów. Rozdział pierwszy jest poświęcony M-estymacji traktowanej jako uogólnienie MNW. Szczególną uwagę zwrócono w nim na odporną klasę M-estymatorów stanowiącą bazę porównawczą w analizie odporności M_{split} estymatorów. W rozdziale drugim przedstawiono teoretyczne podstawy M_{split} estymacji oraz jej rozwinięć i przypadków szczególnych (kwadratowej M_{split} estymacji, Shift-M_{split} estymacji i $M_{split(q)}$ estymacji). Zwrócono uwagę na podobieństwa i różnice pomiędzy tą metodą a klasyczną M-estymacją. Kwadratową M_{split} estymację uzupełniono statystycznym modelem obserwacji zawierającym wspólną dla rozszczepionych modeli macierz kofaktorów (lub wag) i rozszczepione nieznane współczynniki wariancji. Zasadniczą część monografii stanowią jej pozostałe rozdziały, które obok części teoretycznych zawierają także analizy o charakterze empiryczno-numerycznym. W rozdziale trzecim zaproponowano sposób oceny dokładności kwadratowych M_{split} estymatorów oraz konkurencyjnych poprawek i wyrównanych obserwacji wyznaczanych na ich podstawie. Przedstawiono macierze kowariancji tych wielkości i ustalono estymatory rozszczepionych współczynników wariancji. Rozdział czwarty zawiera opis oraz analizę M_{split} i Shift-M_{split} estymacji uzupełnionych o wirtualne modele funkcjonalne absorbujące „nietypowe" obserwacje. Koncepcja takiego uzupełnienia, dającego szczególny typ odporności M_{split} i Shift-M_{split} estymatorom, została już wcześniej opublikowana przez autora niniejszej pracy. W ramach uzupełnienia zawartych tam wyników tutaj przeprowadzono dodatkowe testy o charakterze empirycznym. W rozdziale piątym analizie numerycznej (z zastosowaniem metody Monte Carlo) poddano własności M_{split} estymacji w kontekście odporności na błędy grube i w porównaniu z odpornymi M-estymatorami. Treść rozdziału szóstego stanowi uogólnienie kwadratowej M_{split} estymacji na przypadek zmiennych zależnych. Rozdział siódmy zawiera podsumowanie i wnioski. Pracę kończy zestawienie piśmiennictwa.